jan.mar 2019 issn: 1809-7286

APRENDIZAGEM DO TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO NUMA ABORDAGEM EXPLORATÓRIA COM O GEOGEBRA[1]

LEARNING OF THE INTERMEDIATE VALUE THEOREM IN AN EXPLORATORY APPROACH WITH GEOGEBRA

APRENDIZAJE DEL TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIARIO EN UN ABORDAJE EXPLORATORIO CON EL GEOGEBRA

Vilmar Gomes da Fonseca

Doutorando em Educação Matemática no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IEUL), Professor efetivo do Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ), Nilópolis, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: vilmar.fonseca@ifrj.edu.br

Ana Cláudia Correia Batalha Henriques

Doutora em Educação Matemática, Professora auxiliar no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IEUL), Portugal. E-mail: achenriques@ie.ul.pt

Resumo

Neste texto, apresentamos os resultados de um estudo realizado no âmbito de uma experiência de ensino de cunho exploratório, integrando o uso do GeoGebra, com estudantes de um curso de formação inicial de professores de Matemática, no Brasil. O objetivo do estudo é compreender o papel deste software na aprendizagem do Teorema do Valor Intermediário (TVI). Focamo-nos, em particular, nas aprendizagens destes estudantes que decorrem da realização de uma tarefa exploratória com uso do GeoGebra. Os dados foram recolhidos a partir da observação participante com gravação em áudio e vídeo do trabalho dos estudantes na tarefa em sala de aula e das suas resoluções escritas. Os resultados mostram que os estudantes beneficiaram do trabalho em sala de aula, em torno da tarefa com recurso ao GeoGebra, evidenciando aprendizagens significativas no que respeita ao TVI. Além disso, a exploração da tarefa com o GeoGebra favoreceu a sua concepção de continuidade de uma função associada ao $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, a dedução da continuidade da função como critério necessário para aplicação do TVI, a resolução gráfica de problemas de aplicação do TVI e a identificação de uma estratégia para a sua resolução algébrica.

[1] Comunicação apresentada no V Congresso Internacional TIC e Educação – ticEDUCA2018. Lisboa/Portugal, 2018.

Palavras-chave: GeoGebra, Teorema do Valor Intermediário, Ensino exploratório, Continuidade de funções.

Abstract

This paper presents the results of a study carried out in the context of a teaching experience, following an exploratory approach integrating GeoGebra, with 1st year students of a bachelor's degree in Mathematics, in Brazil, aiming to understand the role of this software in the learning of the Intermediate Value Theorem (IVT). We focus, in particular, on the students' learning resulting from the accomplishment of an exploratory task using GeoGebra. The data were collected from the participant observation with audio and video recording of the students working on the proposed task in the classroom and their written solutions. The results show that the students took advantage from the work carried out in the classroom on the task with GeoGebra, revealing significant learning regarding the IVT. In addition, the exploration with GeoGebra favored their conception of continuity of a function associated with the $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, the inference of the continuity of a function as a necessary criterion to apply the IVT, the solving of problems involving the application of the IVT graphically and the identification of a strategy for solving it algebraically.

Keywords: GeoGebra, Intermediate Value Theorem, Exploratory approach, Continuity of functions.

RESUMEN

En este texto, presentamos los resultados de un estudio realizado en el marco de una experiencia de enseñanza de cuño exploratorio, integrando el uso del GeoGebra, con estudiantes de un curso de formación inicial de profesores de Matemática, en Brasil. El objetivo del estudio es comprender el papel de este software en el aprendizaje del Teorema del Valor Intermedio (TVI). Nos enfocamos, en particular, en los aprendizajes de estos estudiantes que se derivan de la realización de una tarea exploratoria con uso de GeoGebra. Los datos fueron recogidos a partir de la observación participante con grabación en audio y vídeo del trabajo de los estudiantes en la tarea en el aula y de sus resoluciones escritas. Los resultados muestran que los estudiantes se beneficiaron del trabajo en torno a la tarea con el uso de GeoGebra, evidenciando aprendizajes significativos en lo que concierne al TVI. Además, la explotación con GeoGebra favoreció su concepción de continuidad de una función asociada al $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, la deducción de la continuidad de la función como criterio necesario para la aplicación del TVI, la resolución gráfica de problemas de aplicación del TVI y la identificación de una estrategia para su resolución algebra.

Palabras clave: GeoGebra, Teorema del Valor Intermedio, Enseñanza exploratoria, Continuidad de funciones.

INTRODUÇÃO

O conceito de continuidade de funções é fundamental no Cálculo, sendo um pressuposto de aplicabilidade de diversos teoremas, como por exemplo, o Teorema do Valor Intermediário – TVI (LIMA, 2006). Este conceito é frequentemente introduzido nas disciplinas iniciais de muitos cursos superiores, incluindo a formação inicial de professores de Matemática, sendo parte do conhecimento matemático básico que os futuros professores devem adquirir para ensinar matemática (ALBUQUERQUE et al., 2006).

Contudo, a literatura tem revelado que os estudantes de diversos níveis de ensino enfrentam muitas dificuldades na aprendizagem da continuidade, algumas das quais associadas também ao TVI, tais como: incompreensão da notação algébrica apresentada na descrição do TVI, dos conceitos matemáticos a ele associado (continuidade de uma função num ponto ou intervalo, conceito de variável real, etc.) e incapacidade de validar seus pressupostos na resolução de problemas que o envolve (TALL, VINNER, 1981; SEALEY, DESHLER E HAZEN, 2014; STRAND, 2016).

Para Sealey, Deshler e Hazen (2014), estas dificuldades podem está relacionada com problemas no ensino desse teorema aos estudantes, e indica que este ensino deve considerar a construção de intuições adequadas deste teorema que favoreçam a significação da notação algébrica e o seu papel na proposição matemática que o define. Ademais, deve ser enriquecido com explorações de suas diferentes representações (verbal, algébrico e geométrico) com recurso ao uso de tecnologia, que encaminhem os estudantes a resolução de problemas (KARATAS, GUVEN, CEKMEZ, 2011).

O ensino de conceitos matemáticos com recurso a tarefas exploratórias integrando o uso de *software* de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, tem recebido bastante atenção nas pesquisas em Educação Matemática, seja pelas vantagens em viabilizar um ambiente de aprendizagem rico e eficiente que não é possível num contexto de papel e lápis ou pela possibilidade de criar soluções didáticas que permitam aos estudantes alcançarem aprendizagens mais efetivas (LEUNG, 2017). Reconhecendo os contributos do GeoGebra para a aprendizagem e compreensão dos conceitos matemáticos, alguns pesquisadores têm vindo a considerá-lo como recurso no ensino e aprendizagem do conceito de continuidade, confirmando vantagens no seu uso (ALVES, 2010; DIKOVIC, 2009). Estes estudos têm-se focado maioritariamente na aprendizagem conceitual, havendo ainda poucas evidências empíricas sobre o papel do GeoGebra para a compreensão dos principais teoremas do Cálculo relacionados com esse conceito, incluindo a aplicação desses teoremas na resolução de problemas (LEUNG, 2017; TALL, SMITH, PIEZ, 2008)

Neste contexto, surge como pertinente a realização de uma experiência de ensino de cunho exploratório integrando o uso do GeoGebra visando a aprendizagem do conceito de continuidade de uma função por estudantes que frequentam a disciplina de Introdução ao Cálculo do 1º ano de um curso de formação inicial de professores de Matemática, no Brasil. Neste texto, em particular, analisamos as aprendizagens destes estudantes que decorrem da realização de uma tarefa exploratória que visa promover a aprendizagem do Teorema do Valor Intermediário (TVI) com o objetivo de compreender o papel do GeoGebra para essa aprendizagem.

APRENDIZAGEM DO TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

A continuidade de funções é uma condição necessária à aplicação de diversos teoremas do Cálculo, incluindo o TVI. Este teorema é introduzido no início do ensino de Cálculo e constitui uma boa oportunidade para os estudantes reconhecerem a aplicabilidade do conceito de continuidade de funções (SEALEY, DESHLER, HAZEN, 2014). Neste artigo, o termo Teorema do Valor Intermediário (TVI) é usado para designar a expressão algébrica, ou equivalente, que define a proposição: Seja $f: [a, b] \to R$ uma função contínua. Se d for um número real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$ com $f(a) \neq f(b)$, então existirá um $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = d$ (LIMA, 2006).

Este teorema possui várias aplicações teóricas interessantes, entre elas, o problema de garantir a existência de raiz de uma equação, o qual constitui a base de muitos problemas físicos e químicos cuja resolução se enquadra nestas aplicações (MORAIS, 2013). A aprendizagem do TVI também é fundamental para a aprendizagem de tópicos do Cálculo uma vez que é usado na demostração de diversos outros teoremas matemáticos. Por exemplo, nos teoremas do ponto fixo, assegura a existência de um ponto fixo de uma função $(x \in D_f$ tal que $f(x) = x)$ e no teorema fundamental da álgebra garante que qualquer polinômio de uma variável, de grau $n \geq 1$ e coeficientes complexos, possui pelo menos uma raiz complexa (LIMA, 2006; MORAIS, 2013).

Na aprendizagem do TVI, a literatura salienta, entre outros aspetos: a importância dos estudantes reconhecerem os pressupostos de sua aplicabilidade, nomeadamente a continuidade de uma função num intervalo $[a,b]$ e $d \in (f(a), f(b))$; serem capazes de validá-los utilizando a definição de continuidade; e de aplicarem estes conhecimentos na resolução de problemas que o envolva (MORAIS, 2013; SEALEY, DESHLER, HAZEN, 2014; STRAND, 2016). Esses autores também destacam a importância do ensino TVI ser conduzido por uma abordagem que promova a compreensão das noções formais e/ou informais da continuidade de uma função e a significação e papel das simbologias algébrica apresentada na proposição que o define, os quais podem favorecer a identificação e validação dos pressuposto do TVI, e promover a resolução de problemas que requerem a sua aplicação, disponibilizando assim condições concretas de sua utilização.

O GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DA CONTINUIDADE

O GeoGebra é um *Software* de Geometria Dinâmica cuja multiplicidade de recursos favorece as construções geométricas dinâmicas do conceito de continuidade (ALVES, 2010; AYDOS, 2015). Por exemplo, os recursos vetoriais que permitem a modificação dinâmica do traçado gráfico de uma função favorecem a visualização e interpretação de diferentes representações do conceito de continuidade, contribuindo assim para o enriquecimento da visão bidimensional dos aspetos ligados a este conceito (ROCHA, 2010). Segundo Alves (2010), a visualização e o dinamismo do GeoGebra, facilitam o reconhecimento da (des)continuidade de funções e a formulação de conjeturas matemáticas, a partir da análise dos seus gráficos. Para Dikovic (2009), o uso das ferramentas do GeoGebra que permite a exploração de uma gama mais ampla de tipos de funções, possibilita a realização de conexões entre os aspectos simbólicos e visuais associados à continuidade de funções. Aydos (2015), por sua vez, indica que o ambiente dinâmico no GeoGebra, suportado por múltiplas representações do conceito de continuidade (algébrica, geométrica e tabular), favorece construções matemáticas abstratas deste conceito e maior compreensão das suas propriedades.

Estes estudos indicam que o GeoGebra também pode ser usado para incentivar a descoberta, experimentação e visualização no estudo da continuidade de funções, aspetos que consideramos importantes para a aprendizagem do Teorema do Valor Intermediário.

METODOLOGIA

Este estudo, de natureza qualitativa e interpretativa (COUTINHO, 2011), foi realizado no 1º semestre do ano letivo de 2016, no âmbito de uma experiência de ensino de cunho exploratório integrando o uso do GeoGebra, que visava promover a aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade de funções, com os 14 estudantes que frequentavam a disciplina de Introdução ao Cálculo do 1º ano de um curso de formação inicial de professores de Matemática, no Brasil. O investigador, primeiro autor desta comunicação, assumiu também o papel de professor na lecionação das aulas da experiência de ensino.

A tarefa de cunho exploratório que é foco de análise nesta comunicação envolvia a aprendizagem do TVI e foi construída com base em aspetos referidos na literatura que se constituem como objetivos de aprendizagem dos estudantes sobre o TVI, nomeadamente: *i)* Reconhecer a (des)continuidade de uma função num intervalo fechado [a,b]; *ii)* Reconhecer os pressupostos de aplicação do TVI; e *iii)* Mobilizar os conhecimentos sobre o TVI e aplicá-los na resolução de problemas que o envolve (MORAIS, 2013; SEALEY, DESHLER, HAZEN, 2014). Os estudantes resolveram-na em pares e com recurso ao GeoGebra, numa aula de 2h 15min que seguiu uma abordagem de ensino exploratório (CANAVARRO, 2011). Nas aulas que antecederam a sua aplicação os estudantes já tinham trabalhado os conceitos de limite e continuidade com o GeoGebra, seguindo a mesma abordagem, pelo que estavam familiarizados com este *software* e a natureza do trabalho exploratório.

Nesta tarefa, as Q_1, Q_2 e Q_3 visam verificar se os estudantes reconhecem a (des)continuidade de uma função f_k, $k \in R$, no intervalo [a, b], a partir da interpretação do seu gráfico representado no GeoGebra. Com as Q_4, Q_5 e Q_6, auxiliadas por explorações dinâmicas do $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ e $f(x_0)$ no gráfico da f_k, pretende-se que os estudantes verifiquem a continuidade da função em [a, b] como uma condição para garantir a existência de $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = d$, onde $d \in (f(a), f(b))$. Por fim, a Q_7, verifica a capacidade dos estudantes mobilizarem conhecimentos adquiridos nas questões anteriores, para resolver um problema de aplicação do TVI, nomeadamente, provar que $p(x) = x^7 - 5x^4 + 3$ possui pelo menos uma raiz real no intervalo [1, 2]. Desta forma, os estudantes foram conduzidos autonomamente à dedução do TVI, sendo esse teorema enunciado formalmente pelo professor, no momento da sistematização das aprendizagens após a aplicação da tarefa.

A recolha de dados incluiu a gravação áudio e vídeo do trabalho dos estudantes em sala de aula, na resolução da tarefa, e os diálogos de alguns dos pares e as suas produções escritas (dos 7 pares). A análise dos dados, descritiva e interpretativa (WOLCOTT, 2009), foi realizada através da triangulação dos mesmos e centrou-se nos referidos objetivos de aprendizagem do TVI. O papel do GeoGebra para essas aprendizagens foi analisado com foco nas suas potencialidades e limitações para a aprendizagem do TVI e emergiu dos dados. Para apoiar a análise realizada, incluímos excertos do trabalho realizado pelos estudantes (cujos nomes são fictícios) na resolução das questões da tarefa (identificadas por $Q_i, i = 1, \dots, 7)$.

RESULTADOS

Nas Q_2 e Q_3 os estudantes precisaram de interpretar o gráfico da função f_k , $k \in R$, para decidir sobre sua (des)continuidade. Cinco pares de estudantes recorreram à análise do comportamento do gráfico da função, representada no GeoGebra, nos pontos $x = 2$, $a = -2$ e $b = 4$ para aferir a veracidade das igualdades $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$, o que lhes permite concluir corretamente que a função f_k é contínua nos extremos $a = -2$ e $b = 4$ do intervalo mas descontínua no intervalo aberto (a, b), uma vez que não era contínua em $x = 2$, conforme exemplificado na resposta de Eliseu e Vítor (figura 1).

Q_2: Essa função (original) é contínua no intervalo aberto (a, b)? Justifique.

Não, porque os limites laterais no ponto $x = 2$ são diferentes.

Q_3: Ela é contínua nos extremos a e b? Justifique.

Sim, pois $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ e $\lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$

Figura 1 - Respostas do par Eliseu e Vítor às Q_2 e Q_3 da tarefa

Os outros dois pares, apesar de terem reconhecido corretamente a descontinuidade da f_k em $x = 2$, calculando os limites laterais neste ponto e verificando que não eram iguais, não conseguiram reconhecer a sua continuidade nos extremos do intervalo, tal como evidencia a resposta de Ismael e Talita (Q_3): "Não, a função não é contínua nos pontos a e b , porque não existe limite e os pontos em x tem imagens". Ao justificarem a não continuidade da função nos pontos a e b "porque não existe limite" os estudantes estão a basear-se no resultado do cálculo dos limites laterais nesses pontos: $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x) \neq \lim_{x\to b^+} f(x)$. Desta forma é possível inferir que estes estudantes não se aperceberam que a análise da continuidade da função nos extremos de um intervalo, deverá considerar apenas a análise dos limites laterais onde a função está definida, neste caso, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

Na resolução destas questões, verifica-se que a visualização dinâmica do comportamento do gráfico da função f_k e de aproximações $x \to x_0$ e $f(x) \to L$, produzidas pelas suas explorações no GeoGebra, favoreceu a consolidação da concepção correta da continuidade de função associada ao $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, tal como se evidencia no diálogo entre Fátima e Miriam durante a resolução da tarefa:

> **Miriam:** Esta função é contínua no intervalo aberto? [Q_2] Não, pois para o ponto $x_0 = 2$ não existe limite! [visualiza $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 7$].
> **Fátima:** Sim. Isso, coloca isso.
> **Miriam:** Vamos lá, ela é contínua nos extremos a e b ? [Q_3] Sim, pelo que eu estou vendo existe limite né? [...] Bom, estou pensando, como a gente vai analisar o limite?
> **Fátima:** Então, no caso de $x = b$ a gente analisa vindo pela esquerda. No caso de $x = a$, a gente analisa vindo pela direita [faz no *applet* $x \to a^+$ e $x \to b^-$].
> **Miriam:** Isso, então existe! porque para todos os valores de x se aproximando por aqui [faz no *applet* $x \to 2^+$] as imagens vão se aproximar de 11 que é a imagem de b está vendo? ... [indica $f(x) \to f(b) = 11$]. Para o ponto $x = a$, o limite é imagem de a .
> **Fátima:** Se o limite [lateral] é igual a função ela é contínua no extremo.

Neste diálogo fica evidente que a visualização no gráfico da função f_k que o $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ permitiu a Miriam concluir que a função não é contínua no intervalo (2, 4), sendo acompanhada por Fátima na sua conclusão. Estas estudantes também revelam uma concepção correta de continuidade de uma função associada à igualdade $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ que é consolidada à medida que recorrem às explorações do GeoGebra e mobilizam conhecimentos sobre a existência de $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e de sua igualdade a $f(x_0)$ para resolver a Q_3, pois para concluir sobre a continuidade lateral nos extremos no intervalo [2,4] fazem no *applet* $x \to a^+$ e $x \to b^-$ para determinar o $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -7$, $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 11$, $f(a) = -7$ e $f(b) = 11$. Após certificarem-se que $\lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$ e $\lim_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$, concluem que a função é contínua nos extremos a e b.

Na resolução das Q_4, Q_5 e Q_6 ocorreu algo inesperado. Um dos primeiros pares a resolvê-las, Eliseu e Vítor, apresentou dúvidas no tocante à visualização dos efeitos das explorações do *applet*, no gráfico da função f_k. Ao realizar modificações do parâmetro d e visualizar os pontos de interseção entre a reta $y = d$ e o gráfico da função f_k, indicado por $N(x, d)$, Eliseu percebeu, que em dado momento, o ponto **N** desaparecia da tela. Esta 'falha' no GeoGebra poderia influenciar a sua conclusão sobre a existência de $x_0 \in (a, b)$ cuja imagem é $f(x_0) = d$, pelo que solicita ao professor esclarecimento (figura 2).

Eliseu: Professor, eu não consigo traduzir isto. Olha, o gráfico vem, eu vou marcando a interseção [$N(x, d)$] até este ponto [mostra comportamento do gráfico para $-7 < f(x) < 2{,}5$]. Daqui para frente, até $f(x) = 3$, deixa de existir interseção. Vai aparecer intersecção novamente ... [pausa] Ué! [visualiza que não há interseção para $f(x) = 7{,}4$ - imagem ao lado].

Professor: Isso é um erro no *applet*. Porque deveria aparecer a intersecção aqui [indica um ponto $N(x, d)$]. Mas não tem problema [interrompido por Eliseu].

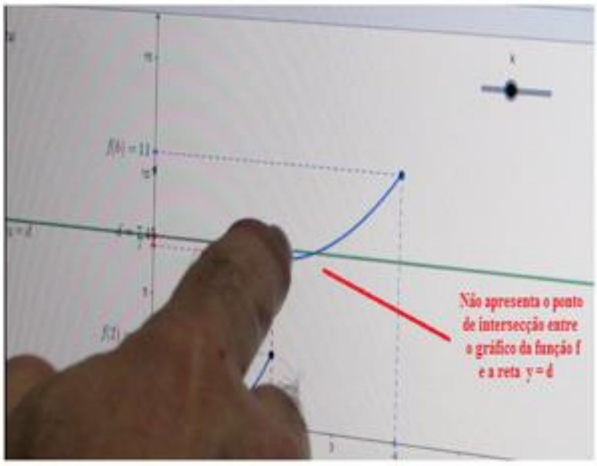


Figura 2 - Diálogo e exploração no GeoGebra do par Eliseu e Vítor na tarefa.

Ao relatar o motivo de sua dúvida, Eliseu recorre às explorações no GeoGebra e é surpreendido com o desaparecimento do ponto $N(x, d)$ no gráfico da função, que segundo o professor, é causado por um erro no GeoGebra. O diálogo segue:

Eliseu: Então, o que acontece é que ele [gráfico] vem com intersecção, pula [em $x = x_0$, vem e para de existir [a intersecção], e depois começa a existir de novo. Ou seja, tem um intervalo aqui [indica $2{,}5 < d < 3$] que ele deixa de existir.

Professor: Na verdade, a intersecção continua existindo. O problema está no *applet.* Olha só, coloca sua reta $y = d = 2{,}5$. Aqui tem interseção?

Eliseu: Deveria ter, mas não aparece!

Professor: Sim. Tem intersecção. Agora eu te pergunto: Aqui tem interseção? [indica no *applet* se existe $3 < d < 7$]

Eliseu: Não, a função dá um salto.

Professor: Perfeito. Às vezes o *applet* apresenta este erro! É um erro de comando.

Eliseu: Ah tá! Eu estava achando estranho.

O professor esclarece Eliseu que o desaparecimento do ponto $N(x, d)$ é causado por um erro de comando do GeoGebra e conduz o estudante, através de questionamento, a identificar a (in)existência do **N**, pela visualização da intersecção da reta $y = d$ com o gráfico de f_k. Na sequência deste episódio, o professor esclareceu os estudantes que havia uma limitação visual no *applet* do GeoGebra, causada por erros no comando de interseção de curvas. Pediu-lhes que se orientassem também pela análise visual das curvas, a fim de identificar os pontos de intersecções $N(x, d)$, mesmo que estes não estivessem representados no *applet.* Desta forma, esta limitação do GeoGebra foi resolvida tendo os estudantes seguido, sem problemas, na resolução da tarefa.

A análise dos dados revela que todos pares de estudantes conseguiram descobrir que a continuidade da função em [a, b] é uma condição para garantir a existência de $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = d$, onde $d \in (f(a), f(b))$ (TVI). Esta aprendizagem parece ter sido favorecida pelas explorações no *applet* do GeoGebra, nomeadamente, as simulações dos pontos (x_0, k) e (x, d) e a visualização dos efeitos dessas simulações no gráfico da função f_k, como se pode perceber do diálogo entre Pedro e Cláudio e da resposta dos estudantes à Q_6:

Cláudio: A pergunta é para qualquer valor de d, entendeu? [explica a Q_4] Aqui, óh: Seria possível garantir um valor de x_0 – tem que existir o valor de x_0 entre a e b – Você pode garantir para qualquer valor de d? Não, porque aqui óh, quando $d = 4$ não posso garantir o x_0 [faz $d = 4$ no *applet* e visualiza o gráfico de f_k].

Pedro: Realmente, a gente não pode garantir o valor de x_0 porque não existe limite neste ponto.
Cláudio: Lógico! Mas não existe o limite porque a função é descontínua neste intervalo.
Pedro: A gente pode colocar que não é possível garantir [$f(x_0) = d$] porque a função é descontínua.

No diálogo, verifica-se que os efeitos das explorações que Cláudio realizou no *applet* o ajudou a reconhecer que não era possível garantir a existência $x_0 \in (a, b)$ cuja imagem pela função f_k é d, pois faz no *applet* $d = 4$ e visualiza o gráfico de f_k que apresenta descontinuidade em $x_0 = 2$, com $f(2) = 3$ (tipo salto) e conclui "quando $d = 4$ não posso garantir o x_0". Pedro confirma a conclusão de Cláudio e aponta como causa, a inexistência do limite no ponto, que encaminha à descontinuidade da função. Na sequência do diálogo, esta conclusão é reforçada e confirmada na resposta à Q_6.

Pedro: Altere o valor do parâmetro k. Em seguida volte a clicar no parâmetro d [Q_5].
Cláudio: Ok, e muda ele, né? Vamos lá [arrasta o d no *applet*]. Agora tem ponto (x_0, d). Agora o ponto vem oh! O ponto vai até o final [explora]. O ponto vai, o ponto vai...
Pedro: O ponto vai, o ponto vem, o ponto vai, o ponto vem. Agora registe algumas notas que você chegou. Como poderá garantir a existência do x_0?
Cláudio: Agora sim! Agora dá. Olha! [mostra os pontos (x_0, d) no *applet*] Porque, após as modificações de k, sim! É possível garantir porque ela é contínua.
Pedro: Como poderá garantir a existência do x_0 ... [Q_6]? Só é possível garantir o x_0 se a função for contínua no intervalo [a, b].

Cláudio modifica o d no *applet*, visualiza o efeito das modificações e conclui: "agora tem ponto", referindo-se aos pontos $N(x, d)$ que mostram a existência de $x_0 \in (a, b)$ cuja imagem é d. Os excertos "o ponto vai, o ponto vai ..." e "ponto vai, o ponto vem," revelam que a visualização dos pontos se movimentando no gráfico, permitiu-lhes descobrir que a continuidade como critério para a existência de $f(x_0) = d$ e concluir na Q_6: "Só é possível garantir o x_0 se a função for contínua no intervalo [a, b]".

Por fim, todos os sete pares de estudantes conseguiram, na Q_7, provar que $p(x) = x^7 - 5x^4 + 3$ possui pelo menos uma raiz real no intervalo [1, 2], apoiando-se nas ideias relacionadas ao TVI que foram exploradas nas questões anteriores, nomeadamente, foram verificar se os pressupostos de aplicabilidade do TVI eram satisfeitos. Estes estudantes foram capazes de reconhecer e provar a continuidade da função em [1, 2] e que $f(1) < d < f(2)$, e com base nestes pressupostos, concluíram a existência de $x \in (1,2)$ cuja imagem $f(x_0) = 0$, como exemplificado pela resposta de Gil e Maria (figura 3).

Para além disso, verifica-se que experimentações no GeoGebra possibilitaram este par de estudantes, resolver graficamente o problema e delinear a estratégia de sua resolução algébrica, recorrendo à aplicação do TVI.

> **Maria:** Como garantir que tem uma raiz real dentro deste intervalo [1, 2]? [Q_7] Ele quer uma raiz real no intervalo [1, 2]. Ela tem que tocar o eixo **x** neste intervalo [1, 2].
> **Gil:** Ela é polinomial então é continua. Se ela tiver $f(x) = 0$ ela vai ser contínua? O limite pode ser zero? … Ah pode. Deve ser alguma coisa em torno disso: Vamos colocar no GeoGebra $f(x) = x^7 - 5 * x^4 + 3$.
> **Maria:** Ela toca o eixo **x** no intervalo [1, 2]?
> **Gil:** Ela toca o eixo **x**. Toca sim [visualiza $p(x) = 0$ no *applet*]
> **Maria:** Não aproxima muito [faz zoom]. A gente está vendo que tem raiz no intervalo. Tira o zoom, tira o zoom! Não podemos olhar o número e substituir simplesmente. Porque isso aqui [indica o gráfico de p] é para a gente descobrir qual é o número e garantir que tem. A gente tem que mostrar isso pelos nossos procedimentos.

O diálogo anterior revela que estes estudantes recorreram a experimentações no GeoGebra para resolver graficamente o problema, pois digitam corretamente na sua barra de entrada, o comando “ $f(x) = x^7 - 5 * x^4 + 3$ ” para esboçar o gráfico da função p, e a partir de sua observação concluem que esta função possui uma raiz no intervalo [1, 2]: “Ela toca o eixo x no intervalo [1, 2] … Ela toca. Toca sim”. Contudo, Maria reforça que esta solução serve apenas para direcioná-los a encontrar uma estratégia de resolução analítica do problema garantindo as condições necessárias de aplicabilidade do TVI. Os estudantes procuram então resolvê-lo seguindo esta estratégia, conforme se pode observar no seguinte diálogo:

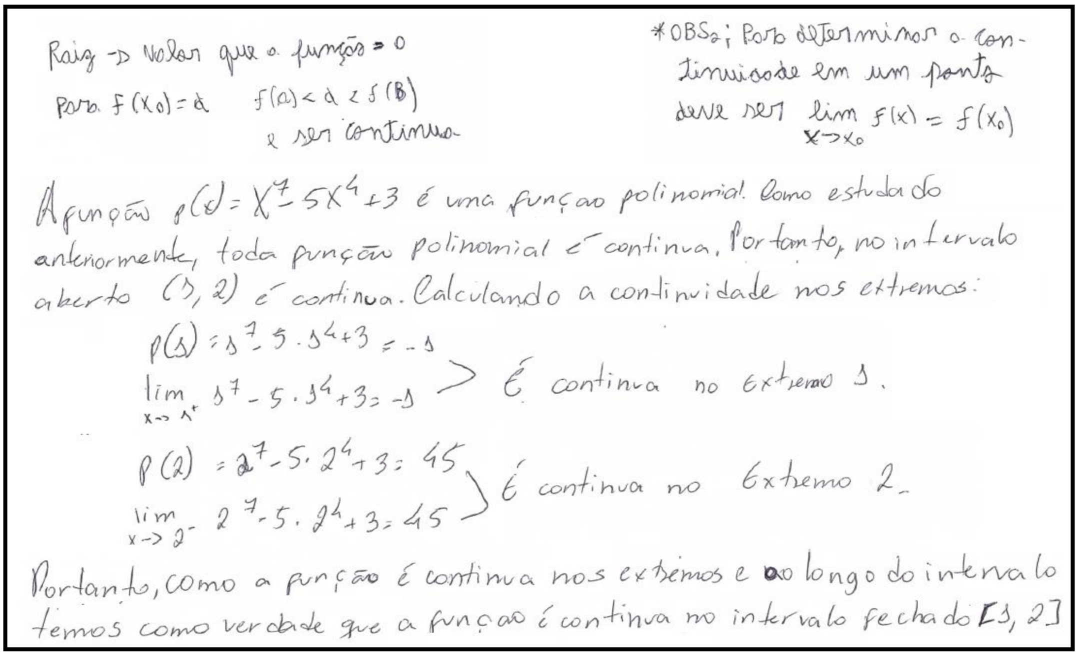
Maria: Como garantir que tem uma raiz real dentro deste intervalo [1, 2]? [pausa curta] Ah Gil, entendi! Tem de achar um número dentro deste intervalo [1, 2], que corte o eixo **x**. Lembra do que a gente concluiu anteriormente? [...] Que a condição para existir um valor $x_0 \in [a,b]$ com $f(x_0)$ entre $f(a)$ e $f(b)$ [interrompida por Gil]

Gil: É a continuidade. Então para existir o x_0 a $p(x)$ deve estar dentro de um intervalo?

Maria: Sim! E qual é este intervalo? Eu sei que se substituir $x = 1$ em $p(x)$ vai dar -1.

Gil: Para $x = 2$ temos $p(2) = 128 - 5 \times 16 + 3$, que dá 45... [aplicam o TVI].

Este diálogo revela que este par foi capaz de mobilizar conhecimentos sobre as condições necessárias de aplicabilidade do TVI, de modo a concluir sobre a existência de $x_0 \in (1,2)$ tal que $p(x_0) = 0$, tendo apresentado uma resposta correta à Q_7 (figura 3).


Raiz -> Valor que a função = 0
Para $f(x_0) = d$ $f(a) < d < f(b)$
e ser contínua

*OBS2; Para determinar a continuidade em um ponto deve ser $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

A função $p(x) = x^7 - 5x^4 + 3$ é uma função polinomial. Como estudado anteriormente, toda função polinomial é contínua. Portanto, no intervalo aberto $(1, 2)$ é contínua. Calculando a continuidade nos extremos:

$p(1) = 1^7 - 5 \cdot 1^4 + 3 = -1$
$\lim_{x \to 1^+} 1^7 - 5 \cdot 1^4 + 3 = -1$ > É contínua no extremo 1.

$p(2) = 2^7 - 5 \cdot 2^4 + 3 = 45$
$\lim_{x \to 2^-} 2^7 - 5 \cdot 2^4 + 3 = 45$) É contínua no extremo 2.

Portanto, como a função é contínua nos extremos e ao longo do intervalo temos como verdade que a função é contínua no intervalo fechado $[1, 2]$

Figura 3 - Resposta do par Gil e Maria à Q_7.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados indicam que, em geral, os estudantes reconheceram e validaram os pressupostos de aplicabilidade do TVI, que incluía a continuidade da função no intervalo [a, b] e a condição $f(a) < d < f(b)$, e foram capazes de aplicá-lo para resolver problemas que o envolve. No que respeita aos contributos do GeoGebra para as aprendizagens aqui referidas, há evidências de ter: *i)* favorecido a consolidação da concepção da continuidade de uma função associada ao $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ usada para validar os pressupostos do TVI;

ii) favorecido a dedução da continuidade da função em [a, b] como condição necessária de aplicabilidade do TVI, uma vez os efeitos de simulações dos pontos (x_0, k) e (x, d) no gráfico da função f_k, possibilitou a descoberta de que a existência de $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = d$, onde $d \in (f(a), f(b))$, só é garantida quando a continuidade de f_k em [a, b] é satisfeita; e *iii)* possibilitado a resolução gráfica de um problema de aplicação do TVI e o estabelecimento de uma estratégia para a sua resolução algébrica, os quais foram favorecidos por experimentações realizadas no GeoGebra.

Estes contributos foram favorecidos pela multiplicidade de ferramentas do GeoGebra que permite a conexão entre representações algébricas e geométricas do conceito de continuidade (DIKOVIC, 2009). É possível inferir que o GeoGebra foi essencial à aprendizagem dos estudantes, uma vez que apoiados na exploração de seus recursos, grande parte deles conseguiram superar dificuldades relacionadas com a confirmação dos prossupostos do TVI e resolver corretamente as questões da tarefa. Apesar de identificada uma limitação visual do GeoGebra, caracterizada por não apresentar o registo geométrico do ponto $N(x, d)$, interseção entre a reta $y = d$ e o gráfico da função f_k, esta limitação não se configurou num obstáculo à aprendizagem do TVI, beneficiando da intervenção esperada do professor, face ao contexto de ensino exploratório (CANAVARRO, 2011), o qual promoveu esclarecimentos sobre as razões dessa limitação e conduziu os estudantes à visualização alternativa do ponto $N(x, d)$, nomeadamente, a partir da análise gráfica da reta $y = d$ e da função f_k.

Os resultados sugerem que a exploração de tarefas com o uso integrado do GeoGebra, pode ser usada no ensino dos conceitos matemáticos do ensino superior, como o de continuidade de funções, para incentivar a descoberta, experimentação e visualização, e conduzir às aprendizagens efetivas de seus inúmeros teoremas.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado no âmbito de uma bolsa atribuída ao primeiro autor com o apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil e do IFRJ, e no âmbito do Projeto Technology Enhanced Learning at Future Teacher Education Lab, financiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia (PTDC/MHC-CED/0588/2014).

REFERÊNCIAS

AYDOS, M. **The impact of teaching mathematics with GeoGebra on the conceitual understanding of limits and continuity: the case of turkish gifted and talented students**. 2015. 134f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Bilkent, Ankara, 2015.

ALBUQUERQUE, C. et al. **A Matemática na formação inicial de professores**. Lisboa: APM e SPCE, 2006.

ALVES, D. **Ensino de funções, limites e continuidade em ambientes educacionais informatizados: Uma proposta para cursos de Introdução ao Cálculo**. 2010. 152f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Outo Preto, 2010.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. **Educação e Matemática**, Lisboa, v. 115, p. 11-17, nov/dez. 2011. *Disponível em:* <https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4265/1/APCanavarro%202011%20EM115%20pp11-17%20Ensino%20Explorat%C3%B3rio.pdf>*. Acesso em 12 maio. 2018.*

COUTINHO, C. **Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas**: teoria e prática. 1. ed. Coimbra: Almedina, 2011.

DIKOVIC, L. Examining continuity/discontinuity of a function by using GeoGebra. **Teaching Mathematics and computer science**, Debrecen, v. 7, n. 2, p 241-257, nov. 2009.

KARATAS, I.; GUVEN, B.; CEKMEZ, E. A cross-age study of students' understanding of limit and continuity concept. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 24, n. 38, p. 245 - 264, abr. 2011.

LEUNG, A. Exploring techno-pedagogic task design in the mathematics classroom. In: LEUNG, A.; BACCAGLINI-FRANK, A. (Eds.), **Digital technologies in designing mathematics education tasks**: Potential and pitfalls. Cham: Springer, 2017. p. 3–16.

LIMA, E. **Análise real volume 1.** Funções de uma variável. Coleção Matemática Universitária. 8ª Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

MORAIS, F. **Sobre o teorema do valor intermediário**. 2013. 58f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2013.

ROCHA, M. **Desenvolvimento de atividades computacionais na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I:** Estudo de uma proposta de Ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação. 2010. 172f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

TALL, D.; SMITH, D.; PIEZ, C. Technology and Calculus. In: HEIDM. K.; BLUME, G. M. (Ed.). **Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics**. Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2008. v. 1. p. 207 - 258.

TALL, D; VINNER, S. Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Nova York, NY, n. 12, p. 151 – 169, mai. 1981.

SEALEY, V., DESHLER, J., & HAZEN, K. Strengthening student understanding of mathematical language through verbal and written representations of the intermediate value theorem.

PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, London, UK, v. 24, n. 2, p. 175-190, jan. 2014.

STRAND, S. R. **The intermediate value theorem as a starting point for inquiry** – oriented advanced calculus. 2016. 146f. Tese (Doctorate of Philosophy in Mathematics Education) – Portland State University, Portland, 2016.

WOLCOTT, H. **Writing up qualitative research.** 3ª Ed. Thousand Oaks, CA: SAGE, 2009.